Zadanie 1.
Wyznaczyć granice punktowe $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ oraz zbadać zbieżność jednostajną $f_n \rightrightarrows f$ dla podanych ciągów funkcyjnych:

a. $f_n(x) = \frac{x}{n}$ b. $f_n(x) = (\ln x)^n$ c. $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ d. $f_n(x) = 2n^2 x e^{-n^2x^2}$ e. $f_n(x) = \ln(x + \frac{1}{n})$

Zadanie 2.
Wyznaczyć zbiór A tych liczb rzeczywistych $x \in \mathbb{R}$, dla których zbieżny jest dany szereg. Następnie zbadać w którym przypadku zbieżność szeregu jest jednostajna na zbiorze A.

a. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{2^n}$ b. $\sum_{n=0}^{\infty} ne^{-nx}$ c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+x^2}}$ d. $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$ e. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^2+x^2}$ f. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{x}{n^2}$

g. $\sum_{n=1}^{\infty} (\ln x)^n$ h. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^n}$ i. $\sum_{n=0}^{\infty} \sin\frac{x}{2^n}$ j. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!}$ k. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2+n^2}$ l. $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{2} x^n$

Zadanie 3.
Wyznaczyć pochodną $f'(x)$ oraz całkę $\int_0^x f(t)\,dt$ dla następujących funkcji określonych szeregiem potęgowym:

a. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ b. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^n$ c. $f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n^2-1}$ d. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n$

Zadanie 4.
Wyznaczyć funkcję (podać jawny wzór oraz dziedzinę), którą definiuje dany szereg potęgowy:

a. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n}$ b. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$ c. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ d. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n x^n$

f. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{2n}$ g. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)x^n$ h. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$ e. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$

Zadanie 5.
Wyznaczyć współczynniki szeregu potęgowego

a. $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, podnosząc do kwadratu szereg $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$,

b. $\frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, mnożąc przez siebie dwa powyższe szeregi.

Zadanie 6.
Pomnożyć szeregi $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n!}$ oraz $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$. Jaką funkcję reprezentuje ten iloczyn?

Zadanie 7.
Korzystając z definicji funkcji e^x wyznaczyć szeregi potęgowe funkcji hiperbolicznych
$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ oraz $\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Zadanie 8.
Wyznaczyć szeregi potęgowe funkcji $u(x) := \cosh x \cdot \sinh x$ oraz $v(x) := \frac{1}{2}\sinh 2x$. Nastepnie na podstawie równości $u(x) = v(x)$ porównać wyrazy tych szeregów i wywnioskować tożsamość

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} = 4^n.$$

Zadanie 9.
Podobnie jak w poprzednim zadaniu, na podstawie wzoru $\cosh 2x = 2\sinh^2 x + 1$ udowodnić tożsamość

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} = \frac{1}{2}4^n.$$

Zadanie 10.
Jaka tożsamość wynika ze wzoru $\cosh 2x = 2\cosh^2 x - 1$?